基于频谱—组合双驱动的音乐智能学习系统

——数学在跨学科学习工具中的落地实践

田锦涵

学校： 上海音乐学院附属安师实验中学（2025 级）

工作站： 上海大学数学实践工作站

2026 年 6 月至 11 月

摘　要：演唱练习中，音准偏差缺少即时量化手段，重复练习的进步难以被看见，音乐与数学、人工智能之间也缺少适合艺考生的落地连接。本文围绕演唱情感量化，依次处理音色特征提取、旋律结构计数和两类特征融合三个子问题。频谱端用离散傅里叶变换与 YIN 基频检测提取音色特征并估计音准；结构端用二面体群在旋律空间上的作用、Burnside 引理与轨道—稳定子定理刻画旋律的对称性与复杂度；融合端将二者投影到效价—唤醒度平面，权重采用“先验上线、数据标定、达标替换”策略，以兼顾冷启动与小样本可证伪性。模型在系统「音数之境」中实现，核心模块为声景花园、旋律迷宫与情绪锚点。初步验证显示，组合计数结果与经典数学结论一致，安静环境下基频跟踪平均绝对偏差处于 ±25 音分的教学可用区间；系统已在音乐剧社团和部分音乐艺考群体中试用。

关键词：音乐智能学习系统；频谱特征提取；二面体群；Burnside 引理；情感量化；音乐教育技术

1 引言

1.1 研究问题：音乐剧演唱学习的三个断点

笔者长期参与区级乐团与音乐剧社团排练，并担任特殊儿童融合公益音乐剧项目志愿者。排练中一段唱完，谁也不知道高音偏了多少，只能靠教师主观判断 [1]；没有教师在场时，学习者更处于“无反馈黑箱”。笔者将这些观察归为三个断点：音准与节奏偏差无法量化（**反馈断点**）；重复练声看不到进步轨迹，动机容易衰减（**动机断点**）；音乐课的和声、音程与在数学中的傅里叶、群论被当作两个世界（**认知断点**）。三者指向

同一问题：能否用数学模型把“唱得怎么样”变成可计算、可反馈的量?

1.2 为什么值得做

“音乐中的数学”已进入高中选修，STEAM 研究也肯定其价值 [4, 2, 3]，但课堂可直接使用、以真实数学模型为骨架的工具仍少。现有应用多依赖分数与排名，评分逻辑不透明，特殊儿童尤其抵触“被打分”。若工具只呈现偏差、不作价值判断且部署成本低，或可同时回应“没人反馈”与“不敢被反馈”。

1.3 怎么解决：以情感量化为总目标的双驱动建模

笔者将“唱得怎么样”拆为频域音色与结构复杂度，汇入效价—唤醒度平面 [5, 6]。频谱端用 DFT 提取音色、YIN 判断音准，难在实时；结构端以二面体群作用形式化旋律等价，借 Burnside 引理与轨道—稳定子定理计数并度量复杂度。两路线性融合，权重按“先验上线、数据标定、达标替换”处理。工程为零服务器纯前端，打开网页即用。

1.4 主要成果

本文成果为“频谱—结构—融合”三层模型加一个系统：前两者分别对应情感量化的音色与结构维度，融合模型完成最终定位。系统「音数之境」共 11 个模块，本文只展开三个核心模块，其余简要说明。验证方面，组合计数逐条满足轨道—稳定子约束，欧几里得节奏输出与 Toussaint 文献一致 [16]，安静环境下基频跟踪平均绝对偏差处于 ±25 音分教学区间。

2 相关工作与本文特色

现有音乐学习工具大致可分为三类。一是**智能陪练与评分系统**（如 Yousician），依赖“分数与排名”反馈且逻辑不透明，易加剧特殊儿童等群体的焦虑；二是**音乐情感识别研究**，侧重提升“识别准确率”[6, 7]，极少下沉为教学闭环工具；三是**音乐信息可视化研究** [8, 9]，多停留在展示层面，缺乏与练习反馈的耦合。具体对比见表 1。

如表 1所示，本文系统的差异在于：以频谱与群论显式公式确保量化逻辑可解释；仅呈现偏差数据以实现非评判式反馈；纯前端架构的零服务器部署降低了普惠门槛。

表 1　本文系统与现有音乐智能学习工具对比

系统类型	反馈形式	逻辑可解释	非评判式	零服务器部署
陪练/评分系统	打分与排名	×	×	×
情感识别研究	识别准确率	部分	—	×
音乐可视化研究	可视化展示	✓	—	部分
本文系统	**偏差与情绪轨迹**	**✓（显式公式）**	**✓**	**✓**

3 数学模型：双驱动框架与三个难点的求解

本章按“模型一 → 模型二 → 融合模型”的递进线索展开：每个模型先给出数学构造，再说明其在系统中的作用与对应的难点。对于超出高中课标的内容（如复变函数与信号归一化），侧重解释其物理意义与工程用途。

3.1 模型一：频谱特征提取模型

1. 频域拆解与四个声学特征

麦克风采集的声音为离散序列 $x[0], x[1], \ldots, x[N-1]$。系统通过离散傅里叶变换（DFT）将其转换至频域，以分析频率成分：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N/2. \tag{1}$$

式中 N 为窗长（取 2048），f_s 为采样率（44.1 kHz）。由欧拉公式可知，DFT 本质上是计算信号与各频率三角函数的相似度，其模长 $|X[k]|$ 对应频率 $f_k = kf_s/N$ 处的能量强度。

真实音频的频谱在正负频率轴上呈镜像对称，负频率仅是正频率的翻版。由于分析人声只需正频率，系统仅保留 $k = 0$ 至 $N/2$ 的频点。此举既覆盖了从 0 到最高可分析频率（采样率一半）的全部信息，又将计算量减半。此外，因人耳对幅度比对相位更敏感，后续特征均基于幅度谱 $|X[k]|$ 计算，忽略相位信息。

基于频谱 $|X[k]|$，系统提取了四个对情感色彩敏感的统计量：

1. **频谱质心**：即能量的“重心”频率，数值越大代表高频成分越多，听感越明亮。

$$C = \frac{\sum_k f_k m_k}{\sum_k m_k}, \qquad m_k = 10^{\mathrm{dB}_k/20} \tag{2}$$

2. **频谱熵**：借用信息论中的熵概念，衡量能量分布的混乱程度。归一化到 $[0, 1]$ 后，

越接近 1 说明声音越复杂（如合奏），越接近 0 说明越纯净（如长笛单音）。

$$H = -\frac{\sum_{k=1}^{K} q_k \ln q_k}{\ln K}, \qquad q_k = \frac{p_k}{\sum_j p_j} \tag{3}$$

3. **频谱平坦度**：计算几何平均与算术平均的比值。乐音的能量集中在特定频段，平坦度接近 0；噪声则均匀分布，平坦度接近 1，常用于辅助识别气声。

$$S_{\text{flat}} = \frac{\exp(\frac{1}{K}\sum_k \ln m_k)}{\frac{1}{K}\sum_k m_k} \tag{4}$$

4. **频段能量比**：以 300Hz 和 3000Hz 为界，分别计算低频与高频能量占总能量的比例，用于量化“胸腔共鸣”与“头腔共鸣”的听感。

这四个量都只需遍历一次频点，计算复杂度为 $O(N)$，能够满足浏览器的实时刷新要求。

2. 难点攻克：实时音高检测

在评估音准时，系统需逐帧估算基频 f_0。由于简单的频谱峰值检测易受人声泛音干扰，系统采用经典的 YIN 算法 [12]。其核心是差分函数：

$$d(\tau) = \sum_{j=0}^{N-\tau-1} \left[x(j) - x(j+\tau)\right]^2 \tag{5}$$

该函数计算波形与其平移 τ 个采样点后的逐点方差。$d(\tau)$ 越小，说明信号在时延 τ 处的自相似度越高，即大概率以 τ 为周期重复。为抑制倍频误判，系统利用累积均值对该函数进行归一化[1]。求得周期后，基频即为 $f_0 = f_s/\tau_0$。

为直观反映音高偏差，系统将频率比转换为音分（cents）：

$$\text{cents} = 1200 \log_2 \frac{f_{\text{实际}}}{f_{\text{目标}}} \tag{6}$$

由对数性质可知，100 音分恰为一个半音。系统据此以 ±10 音分（专业容差）与 ±25 音分（教学阈值）为界，对音准偏差进行分级着色反馈。

3. 服务目标与模块模型一主要解决前文提到的“反馈断点”。它将“唱得准不准”和“音色亮不亮”变成了直观的数据。在系统中，该模型主要服务于**声景花园**（频谱实时可视化）与**唱段研习室**（逐句音准评分）两个核心模块。

[1]归一化公式为 $d'(\tau) = d(\tau)/[\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{\tau} d(j)]$。取首个低于经验阈值 0.12 的极小点，经抛物线插值细化后得周期 τ_0。

3.2 模型二：旋律结构组合计数模型

模型动机。仅靠音色难以区分简单与复杂的旋律，而结构复杂度是情感表达的重要维度 [13, 14]。音乐中，将旋律整体平移（卡农）或上下翻转（倒影）后，听感上属于同一形态。这一直觉可用数学中的对称性来描述。要量化结构，需先界定何为旋律本质相同。

数学构造。将长度为 m 的旋律视为由 n 种音高构成的序列 $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$。想象将其写在一个圆盘边缘：旋转圆盘对应旋律平移，翻面圆盘对应倒影。由于有 m 个位置，共存在 m 种旋转与 m 种翻面，合计 $2m$ 种变换。在数学上，该变换集合称为**二面体群** D_m[2]。若旋律在某种变换下音符序列不变，则称其在该操作下对称。

为量化不同旋律的种数，系统引入两个工具：

- **Burnside 引理**计算全局本质不同形态数：$|X/D_m| = \frac{1}{2m}\sum |\mathrm{Fix}(g)|$，即求所有变换下保持不动的旋律数的平均值。

  例（两音高 $n = 2$ 长 $m = 3$）：总排列 $2^3 = 8$ 种。恒等操作下 8 种均不变；两种旋转下仅全高/全低 2 种不变；三种翻面下各 4 种不变。故本质形态为 $(8+2+2+4+4+4)/6 = 4$ 种。
- **轨道-稳定子定理**计算特定旋律的变体数：$|\mathrm{Orbit}(x)| \times |\mathrm{Stab}(x)| = 2m$。即变体数与保持其不变的对称操作数之积恒为 $2m$。旋律越对称，衍生变体越少。

复杂度指标。系统枚举 $2m$ 种变换计算旋律的轨道大小，并定义归一化复杂度：

$$\mathrm{complexity}(x) = \frac{|\mathrm{Orbit}(x)|}{2m} \in (0, 1]. \tag{7}$$

值越趋于 0，旋律越对称简单；越趋于 1，则越破碎复杂。

系统落地。该模型驱动**旋律迷宫**模块：学生在界面输入旋律，系统实时演示 $2m$ 种变换与计数过程，将抽象代数具象化。复杂度得分随后输入融合模型（见 3.3 节）用于情感效价计算；AI 创作工坊亦反向利用此规律，结合马尔可夫链生成变奏旋律 [16]。

3.3 模型三：双特征融合情感量化模型

模型构造。模型三将音色与结构特征映射至效价（V，积极/消极）与唤醒度（A，激动/平静）构成的二维情感平面 $(V, A) \in [0, 1]^2[5, 6]$。

唤醒度 A 受声学能量驱动：低频厚实、高频明亮、频谱分布越散（方差 $\tilde{\sigma}$ 大），听

[2]高中阶段无需深究群论公理，理解其包含 m 种旋转与 m 种翻转即可。

感越激动，加权公式为：

$$A = 0.25\,\tilde{R}_{\text{low}} + 0.45\,\tilde{R}_{\text{high}} + 0.30\,\tilde{\sigma}. \tag{8}$$

效价 V 分两种模式：若检测到旋律结构，复杂度越高（越不对称），效价越低；若无明确结构，则以频谱质心（400–2500Hz 归一化）为准，音色越亮，效价越高 [10, 18]：

$$V = \begin{cases} 0.8 - 0.6\,\text{complexity}(x), & \text{旋律模式} \\ 0.3 + 0.4\,\tilde{C}, & \text{频谱模式} \end{cases} \tag{9}$$

将坐标平移为 $(2V-1, 2A-1)$ 后，系统计算其与四象限预置情绪锚点的欧氏距离，取最近者作为输出标签。

难点求解：小样本权重标定。仅凭经验设定公式常数不够严谨。为支持零数据冷启动，初期先运行经验权重并预留扩展映射[3]。后续收集超 40 段带标注样本，通过岭回归（带惩罚的线性拟合）重估权重；当拟合优度 $R^2 \geq 0.6$ 时，用新权重替换初始值 [19]。

系统落地。该模型落地为**情绪锚点**模块，将演唱情绪实时可视化为平面光标移动，以提供非评判式的练习反馈。

4 系统实现：数学如何形成界面

系统「音数之境」共包含 11 个功能模块，全部运行于浏览器端，采用零服务器部署架构，打开网页即用。本节将选取代表性模块，说明数学知识如何转化为可交互的界面形态：前三个模块与第 3 节的三个数学模型一一对应，后续模块则展示模型在练习、游戏、生成与协作场景中的延伸应用。作为跨学科应用研究，系统的界面呈现本身就是研究成果的重要载体。系统已在线部署，打开网页即可体验全部功能[4]。

4.1 声景花园：让频谱“看得见”

声景花园是模型一的实时可视化入口：演唱音频经 Web Audio API 采集后，通过 FFT 提取频域特征，将低频映射为根系、中频映射为花朵、高频映射为粒子，使声音的数学结构“长”成可见的风景。界面左侧为演唱者的实时声景，右侧为《歌剧魅影》范本声景，两者可对照共鸣。

[3]扩展映射为 $A^* = \text{clip}(0.45\tilde{C} + 0.35\tilde{\sigma} + 0.20\tilde{R}_{\text{high}})$，$V^* = \text{clip}(0.5 + 0.35(\tilde{S}_{\text{flat}} - \frac{1}{2}) - 0.25(\tilde{R}_{\text{low}} - \frac{1}{2}))$。

[4]在线体验：`http://8.133.166.56:3002/`



图 1　声景花园主界面：实时演唱声景与范本声景的对照可视化

可视化画布之外，模块将四个统计量制成实时读数卡片，分别标注公式与听觉含义（如低频能量对应胸腔共鸣），帮助学习者将主观听感与客观数值对应起来。



图 2　频谱特征实时读数卡片：每个特征量均标注其数学定义与听觉含义

底层的数学内核面板分科普、进阶、学术三层，讲解频率分辨率、幅度转换及频谱质心公式，并附进阶公式与频段划分依据。界面引导学习者先看视觉变化、再看数据读数，最后展开公式，使抽象概念在直观体验中落地。



图 3　数学内核面板：FFT 频谱特征提取的三组核心公式与交互式讲解

4.2 旋律迷宫：让群作用“可触摸”

系统接收旋律后即时枚举二面体群 D_m 的 $2m$ 个变换，界面分栏展示移位倒影操作、轨道结构及 Burnside 引理的逐项计算，使抽象群论变为直观的数学实验。



图 4　旋律迷宫模块界面（对应模型二）：旋律输入、轨道可视化与 Burnside 引理计算账本

4.3 情绪锚点：让情感量化“可回溯”

情绪锚点模块直观呈现计算链路：在 Russell 四象限定位演唱坐标，同步展示双特征公式（A 由频谱驱动、V 由结构驱动，标注待标定），辅以呼吸光色提供非评判反馈，确保量化全程可回溯。

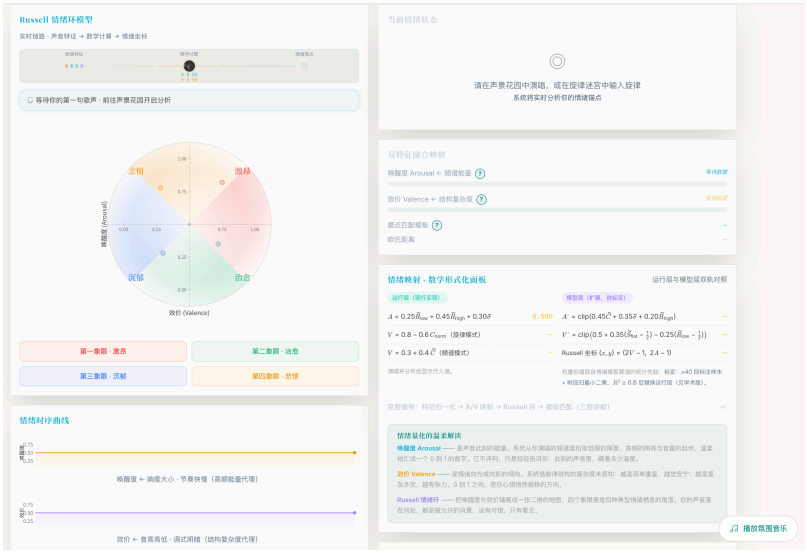


图 5　情绪锚点模块界面（对应融合模型）：Russell 四象限平面与双特征融合公式对照面板

4.4 唱段研习室：让音准偏差“可量化”

唱段研习室将 YIN 基频检测融入“选曲、热身、跟唱、报告”闭环。界面实时对比目标音高（灰虚线）与演唱曲线（粉曲线），按 ±10 与 ±25 音分着色；素材库内置经典唱段且支持音频上传。学习者无需教师，即可获得即时、量化的非评判反馈。

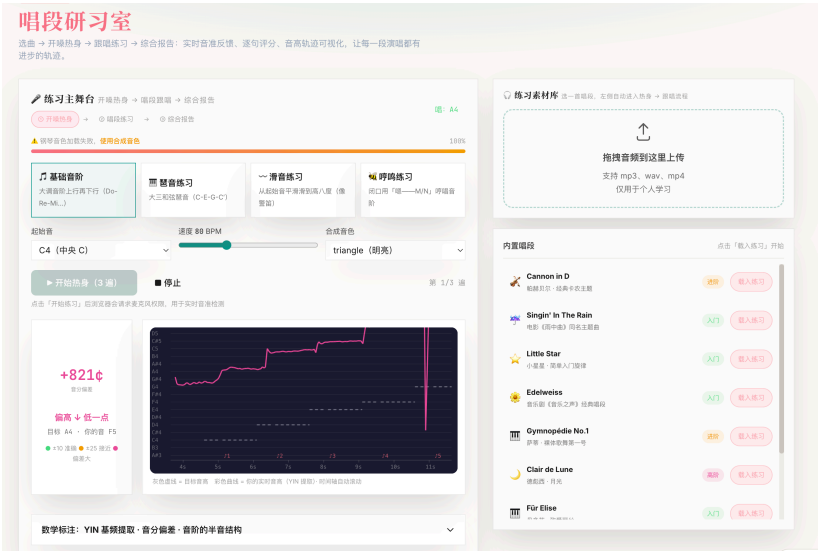


图 6　唱段研习室练习主舞台：音高轨迹实时对比与音分偏差两档着色反馈

双演对照实验室支持输入同一唱段的不同录音（如美声与音乐剧唱法），并行进行 FFT 解析，对比两者的频谱形态、质心数值（如 2236 Hz 与 2741 Hz）及情绪指标，将抽象的听感差异转化为量化事实。

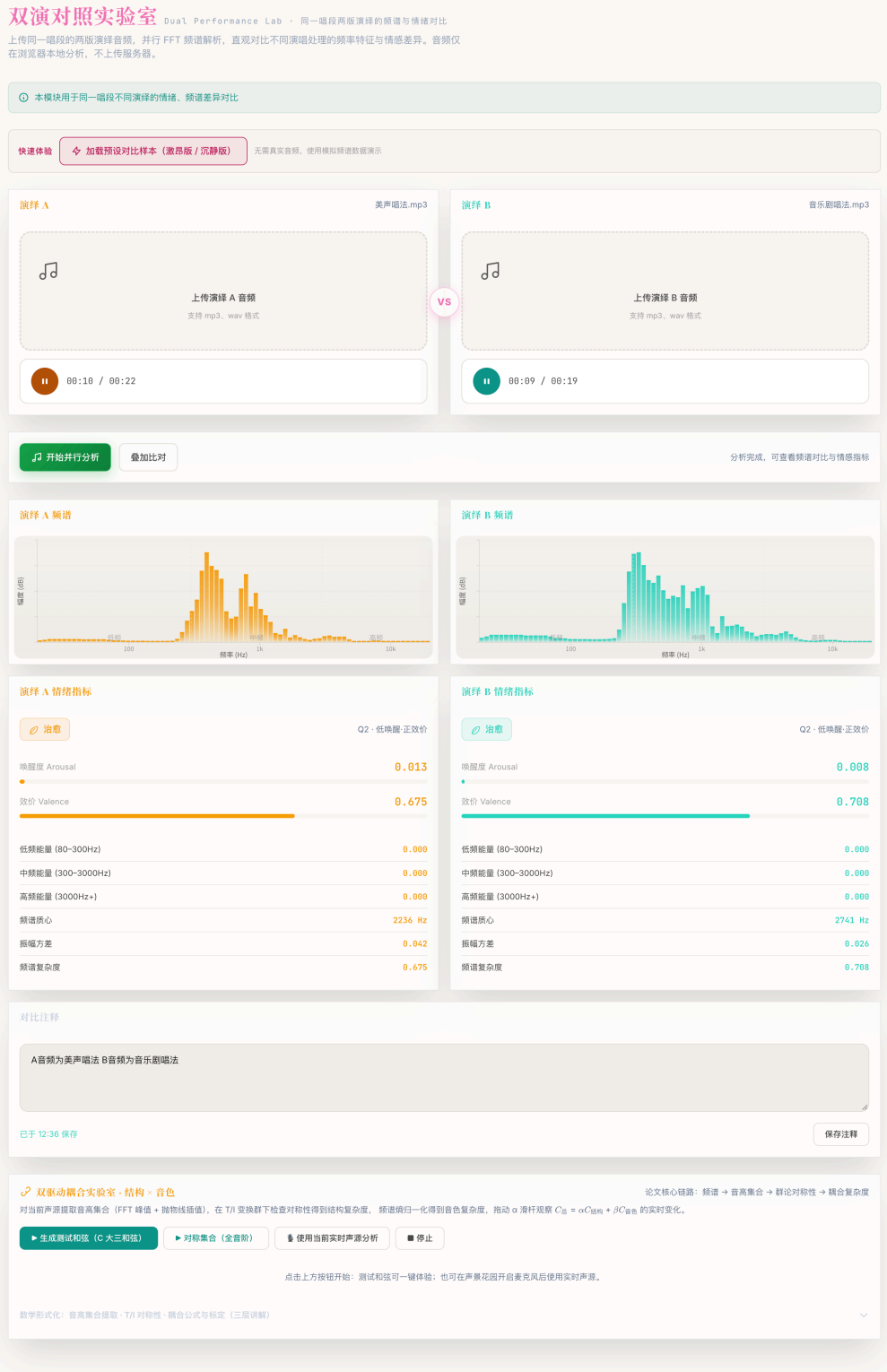


图 7　双演对照实验室：同一唱段两版演绎的频谱与情绪指标并行对比

4.5 音游工坊：让节奏与频谱“可游戏化”

音游工坊设计了八个数学关卡：频谱猎人对应 FFT 频段能量，傅里叶节拍器演示谐波合成，欧几里得节奏机以数论生成世界节奏，音程对战对应纯律，另设耳力特训与音乐史竞答等。游戏化机制将抽象概念转化为关卡目标，以此回应动机断点，使学习者在闯关中潜移默化地培养数学直觉。

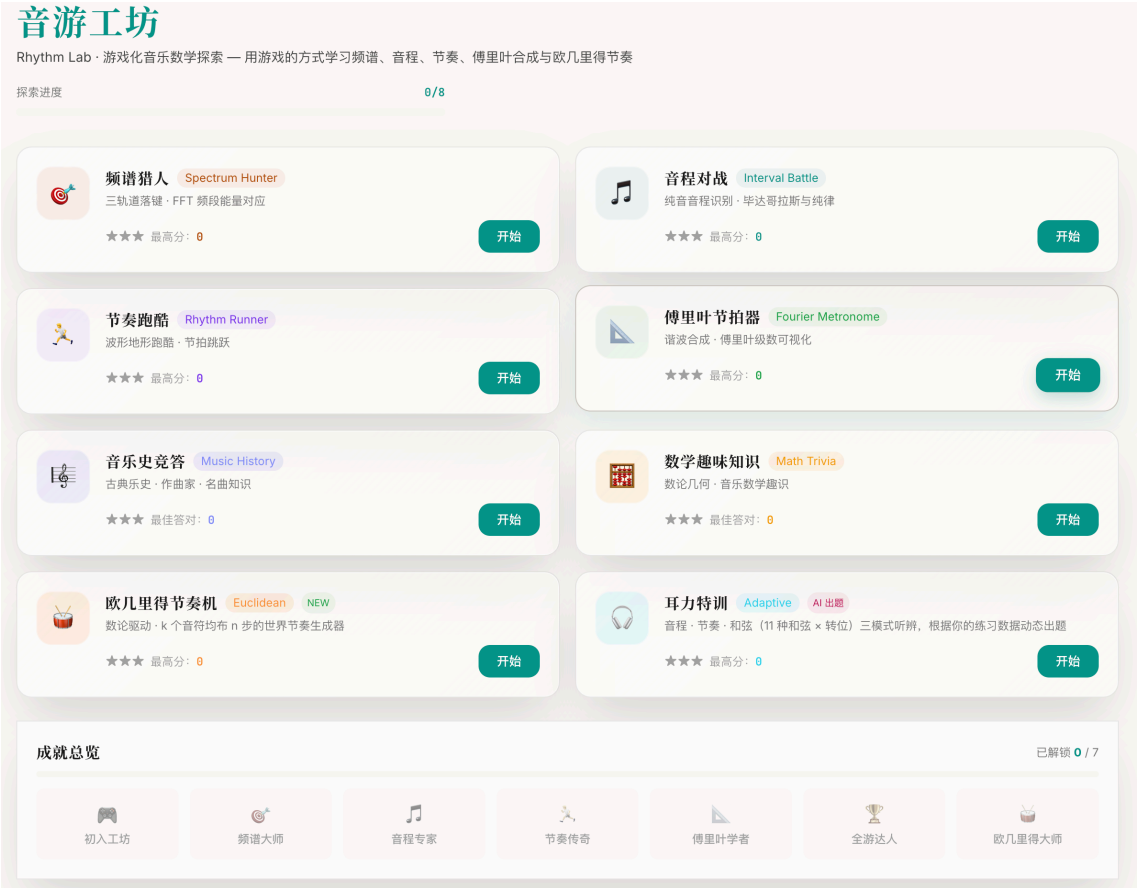


图 8　音游工坊模块界面：八个游戏化的音乐数学学习关卡

4.6 AI 创作工坊：让模型“能生成”

AI 创作工坊反向调用前文模型，实现可解释的音乐生成。首先，用户在效价—唤醒度平面设定情绪坐标，决定调式、速度与节奏；其次，一阶马尔可夫链构建 7×7 转移矩阵，将情绪映射为音高跳进或级进的概率权重；最后，利用二面体群对动机进行原型、逆行、倒影及逆行倒影变奏。该流程使数学从分析工具延伸为创作引擎。



图 9　AI 创作工坊模块界面：情绪输入、马尔可夫转移矩阵与 D_m 群变奏的三步生成链路

4.7　合奏工坊：让信号叠加“可协作”

合奏工坊将主旋律、和声、低音与节奏四轨同步混音，以此展示多声部信号的线性叠加。面板给出叠加公式 $y(t) = g_1x_1(t) + g_2x_2(t) + \cdots$（$g_i$ 为增益），并说明正是基于这一线性前提，复杂合声才能被傅里叶分析拆解为正弦波组合。



图 10　合奏工坊模块界面：多声部录制台与线性叠加原理的数学讲解

合奏工坊的拓展模块「生态交响乐」，提取了 15 种动物叫声的频谱特征，将其映射为音高、音色、节奏等参数，并接入 16 步音序器进行合奏。其数学面板展示了四个核心机制：跨域映射 $f : V_{\text{animal}} \mapsto M_{\text{music}}$、基于播放速率与半音数指数关系的变和声、欧几里得节奏 $E(k,n)$ 以及实时频谱质心。该设计将生物特征转化为可听的音乐，同时印证了数学映射在跨学科场景中的通用性。

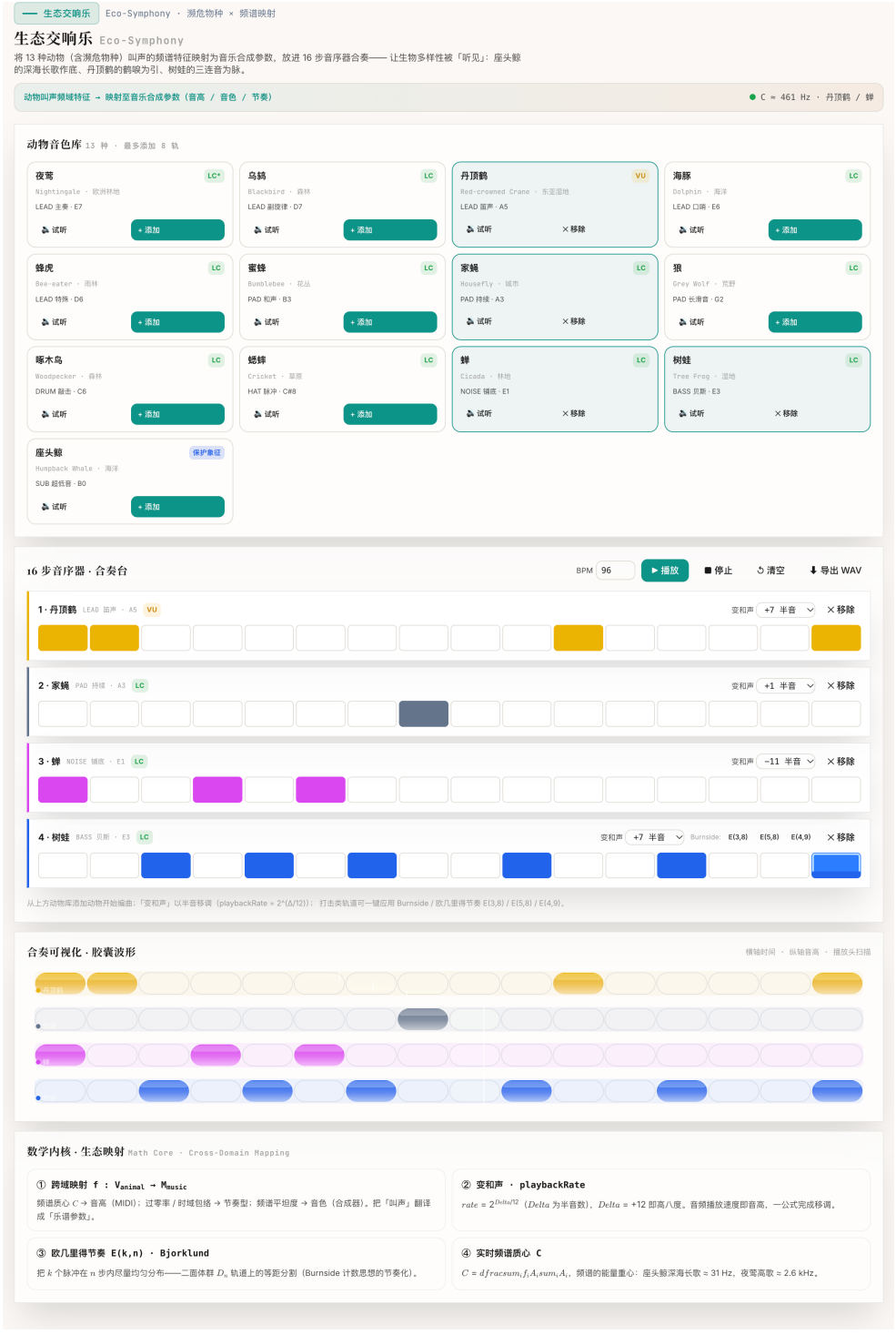


图 11　生态交响乐模块：动物叫声频谱到音乐参数的跨域数学映射

5 成果落地

（1）场景试用与质性反馈。系统已在音乐剧社团与特殊儿童公益项目中初步试用（遵循知情同意与数据匿名化）。在无教师在场时，声景花园与唱段研习室承担了音准反馈职能；基于志愿者观察与访谈，情绪锚点的非评判式反馈有助于缓解特殊儿童对量化评价的抵触。需说明的是，上述结果仅为定性观察，实际效果仍待准实验数据检验。

（2）可复用的算法组件。系统将核心逻辑封装为模块化组件，包括浏览器端基频检测、轨道—稳定子计数器（含自动校验）、欧几里得节奏生成器（含旋转等价判定）及情绪驱动的马尔可夫旋律生成器。这些组件可为音乐科技领域的后续研究提供技术参考。

（3）初步的理论与工程验证。理论方面，轨道—稳定子计数器对样例旋律均满足 $|\text{Orbit}| \cdot |\text{Stab}| = 2m$ 的代数约束；欧几里得节奏生成器的输出（如 $E(3,8)$、$E(5,8)$）与 Toussaint 文献相符（允许循环移位等价）[16]。工程方面，安静环境下对钢琴单音与人声清唱的功能测试显示，基频跟踪的平均绝对误差（MAE）处于 ± 25 音分的教学可用区间；受限于测试样本量，后续将扩大声学样本库以报告完整误差分布。此外，多轮功能回归测试表明，系统在界面渲染、音频激活与状态持久化等核心链路上均无脚本错误。

6 人与社会：技术伦理思考

本课题在开发过程中不可避免地涉及技术伦理问题。工具到底该介入人类学习到什么程度？这是笔者在设计系统时必须先想清楚的问题，主要有以下三点考量。

第一，关于工具的定位。系统本质上只是一个算法辅助工具，而非万能的 AI。它最大的价值，是替教师分担枯燥、重复的音准听辨工作，让教师能把精力留给情感引导。对学生而言，系统只能提供客观的数据反馈，它永远无法替代教师在教学中的情感投入。

第二，关于数据的隐私。演唱音频涉及个人的声音特征，具有极强的私密性。因此，系统在工程上选择了纯前端架构，所有数据都在本地浏览器中计算，绝不上传云端。虽然这让浏览器承担了较重的计算压力，但在数据滥用的风险面前，这样的技术取舍是必要的。

第三，关于量化的边界。当我们用群论去拆解旋律，用频谱去定义情绪时，难免会让人担忧：过度的量化是否会消解音乐的美感？笔者的结论是，数学只是提供了一种观察音乐的理性视角，它只能描述特征，不能替代人的主观感受。因此，系统刻意采取了“只呈现偏差数据，不给出分数和排名”的原则。我们不想做一个发号施令的评分器，而是希望成为一个安静的观测仪。

7 结论与未来展望

研究结论。从数学上看，本文证明离散傅里叶变换与二面体群理论可以分别驱动音乐学习工具的“音色”与“结构”两条通路：两个子模型各自攻克了浏览器端实时基频检测与“旋律本质相同”形式化的难点，其输出经显式线性融合完成情感量化，形成“数学模型服务真实难点”的完整链路。从工程与社会价值看，零服务器部署使严肃的数学工具能够以“打开网页即用”的方式进入中小学课堂与公益场景；但工具的效力最终取决于它所嵌入的学习关系——音准可以被量化，动机与信任不能，这正是“非评判式反馈”作为设计底线的理由。

未来展望。下一步工作沿三个方向展开：一是情感量化模型的标定与泛化，计划收集不少于 500 段带标注样本，以岭回归或轻量机器学习模型重估权重，并在不同年龄与文化背景群体中检验泛化能力 [6, 7]；二是评测维度扩展，引入节奏偏差对齐算法，将单一音准评测升级为“音高–节奏–音色”多维评估；三是实证研究深化，依托已就位的数据埋点在社团与公益机构开展 $N \geq 30$ 的准实验与纵向追踪，以统计检验严谨量化系统对音准改善与练习动机的促进作用。

参考文献

[1] 翁晓宇. 《歌剧魅影》中唱段分析下的音乐剧声乐演唱特征分析 [J]. 大众文艺, 2017(8): 158–159.

[2] 杨悦. 多学科融合视域下的 STEAM 教育对音乐教育的启示研究 [J]. 中国音乐剧, 2024(3): 45–50.

[3] 周艺铭, 范永明. 培养青少年发展视角，让数学“技术加持”高中音乐教学 [J]. 黄河之声, 2025(8): 124–127.

[4] 人民教育出版社课程教材研究所. 普通高中课程标准选修课程用书 · 数学 D 类：音乐中的数学 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2021.

[5] Russell J A. A circumplex model of affect[J]. Journal of Personality and Social Psychology, 1980, 39(6): 1161–1178.

[6] 张卉. 多模态数据驱动的音乐情感识别与推荐研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2021.

[7] 李劲滔. 轻量化模型与跨模态交互的情感分析研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2025.

[8] 梁晓晶. 音乐信息可视化研究 [D]. 北京: 中国音乐学院, 2019.

[9] 陈世哲. 音乐数据量化标准研究 [D]. 上海: 上海音乐学院, 2025.

[10] 臧寅竹. 声乐演唱中情感表达的声学特征分析 [J]. 黄河之声, 2026(3): 55–59.

[11] 丁楠. 基于特征学习的语音情感识别研究 [D]. 南京: 南京邮电大学, 2023.

[12] de Cheveigné A, Kawahara H. YIN, a fundamental frequency estimator for speech and music[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2002, 111(4): 1917–1930.

[13] 李梦. 基于数学方法的音乐流派影响因素与演变预测研究 [J]. 辽宁工业大学学报（自然科学版）, 2022, 42(2): 135–140.

[14] 王杰. 音乐中的数学 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[15] 中岛幸子. 数学与音乐的创造力：捕捉未知与无形 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2015.

[16] Toussaint G T. The Euclidean algorithm generates traditional musical rhythms[C]//Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science. Banff: BRIDGES, 2005: 47–56.

[17] 李晴. 基于贝叶斯非参数模型的音乐分类方法研究 [D]. 天津: 天津商业大学, 2022.

[18] 武锡环. 数学学习情感的量化分析 [J]. 河南师范大学学报（自然科学版）, 2020, 48(5): 118–124.

[19] 王召义. 基于情感分析的用户痛点量化研究 [J]. 宿州学院学报, 2020, 35(1): 72–76.